مجلة الجامعة الإسلامية(سلسلة الدراسات الطبيعية والهندسية) المجلد الثالث عشر، العدد الأول، ص:139-147، يناير 2005

THE RELATION BETWEEN THE BASIS OF THE COMPLEMENTED SPACE F IN E AND THE BASIS OF E

جاسر صرصور **احمد المبحوح**

قسم الرياضيات، الجامعة الإسلامية قسم الرياضيات، الجامعة الإسلامية

العلاقة بين أساس الفضاء الجزئيF المكمل في E و أساس الفضاء E*

ملخص: سنقدم بعض النتائج المتعلقة بمخمنة بيساجا في فضاءات كوثا النووية، لقد برهنا مخمنة بيساجا في فضاء كوثا النووي تحت شروط خاصة علي هذا الفضاء وبرهنا بعض العلاقات التي تربط بين أساس الفضاء F المكمل في الفضاء E و بين أساس الفضاء E.

Abstract: In this paper we introduce some results about Bessaga's conjecture in nuclear kothe spaces. We proved Bessaga's congecture under special conditions in nuclear kothe space. Also, we proved some relations between the basis of the complemented subspace F of E and the basis of the space E.

مقـدمـة

لمعـرفة المصـطلح غـير المعرف يرجع إلى المراجع [4 , 7, 10] . سيرمز لعدد عناصر المجموعـة A بالرمز |A| ، و يرمز إلي الأعداد الحقيقية أو المركبة بالرمز K. كما سنعتبر أن كـل الفضـاءات هي فضاءات فريتشت وهي عبارة عن فضاءات المتجهات المحدبة محليا و المعرف عليها توبولوجيا ناتج عن سلسلة من المقاييس الكاملة.

إذا كانت المصفوفة (a_n^k) الناتجة من الأرقام غير السالبة تحقق كلا مما يأتي

1- لكل n يوجد هناك k حيث إن $0 < a_n^k$

2- لكل k وn فإن $a_n^k \le a_{n+1}^k$

فإن فضاء المتسلسلة

$$K\left(a_n^k\right)=\left\{\left(\zeta_n\right)_n \in K^N : \left\|\zeta_n\right\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\zeta_n\right| \; a_n^p < \infty \;, \forall \; p \in N\right\}$$

يسمى فضاء كوثا، وتسمى المصفوفة (a_n^k) بمصفوفة كوثا.

يمكننا القول بان التوبولوجيا يعرف علي K(a_n^k) بسلسلة من المقاييس المتصلة إذا و فقط إذا كان هناك

$0 < a_n^k$ لبعض قيم k و لكل قيم n .

لهذا فانه يمكن اعتبار $0 < a_n^k$ لكل قيم n,k.

* لقد تم دعم البحث من قبل عمادة البحث العلمي بالجامعة الإسلامية بغزة .

تعريف

يعرف $K\left(a_n^k\right)$ علي انه

1- فضـاء نـووي إذا و فقـط إذا كـان لكل k يوجد r بحيث أن $\left(\frac{a_n^k}{a_n^r}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ "خاصية جروثندك بيتش".

2- فضـاء منتظم إذا كان هناك مصفوفة $\left(b_n^k\right)$ تعرف نفس الفضاء $K\left(a_n^k\right)$ بحيث أن لكل n و لكل

k ≥ s فإن $\left(\frac{b_{n+1}^k}{b_{n+1}^s} > \frac{b_n^k}{b_n^s}\right)$

3- فضـاء مـن الـنوع d_1 إذا كـان هـناك k بحيـث أن لكـل j يوجد s تحقق المتباينة

$$\sup \frac{\left(a_n^j\right)^2}{a_n^k a_n^s} < \infty$$

4- فضاء غير مستقر إذا وفقط إذا كان هناك s بحيث أن لكل p يوجد q لكل r فان

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}^p a_n^r}{a_{n+1}^q a_n^s}\right) = 0$$

5- فضاء مستقر إذا وفقط إذا كان $K\left(a_n^r\right) \cong K\left(a_n^r\right) \times K\left(a_n^r\right)$.

نفـرض أن E هـو فضـاء فريتشت والمعرف عليه توبولوجيا ناتج عن سلسلة من اشباه المقاييس $\left(|\ \ |_r\right)_{r=1}^{\infty}$. نفرض أن $\left(e_n\right)_{n=1}^{\infty}$ هو أساس مطلق للفضاء E وهذا يعني وجود سلسلة من الاقترانات

$\left(e'_n\right)_{n=1}^{\infty}$ المعـرفة علـي E و المـتعامدة علـي الأسـاس $\left(e_n\right)_{n=1}^{\infty}$ بحيث إن لكل $x \in E$ فإن $x = \sum_{n=1}^{\infty} e'_n(x)\, e_n$ وعلاوة على ذلك فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \left|e'_n(x)\right| \left|e_n\right|_p$ متقارب لكل p.

من الواضح انه باستخدام نظرية الصور المفتوحة فإن شرط التقارب يعني أن لكل P $\| X \|_P = \sum | e'_n(x) | \, | e_n |_p$ ، هي سلسلة من أشباه المقاييس وهي تكافئ النظام الأساسي $\left(|\ \ |_r\right)_{r=1}^{\infty}$ المعـرف للتوبولوجيا المعرف علي الفضاء الرياضي E، بمعنى آخر فان الفضاء الرياضي $E \cong K\left(a_n^r\right)$ بحيث $a_n^r = \left|e_n\right|_r$ لكل n, r .

يقـال للأسـاس $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ فـي الفضاء الرياضي X و للأساس $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ في الفضاء الرياضي Y انهما متكافئان تشاكليا " QE" إذا كان هناك اقتران تبديلي π للمجموعة N و كذلـك متسلسلة من الثوابت $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ بحيث إن $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \zeta_n y_{\pi(n)}$ يكون تقاربي إذا و فقط إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \zeta_n x_n$ تقاربي.

من المعلوم ان أساسات الفضاء النووي هي أساسات غير مشروطة.

إذا كان أي أساسين غير مشروطين للفضاء E يحققان خاصية التكافؤ التشاكلي فإنه يقال إن E يحقـق خاصـية التكافؤ التشاكلي. نفرض أن E هو فضاء كوثا النووي و إن $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ أساس له، وكذلك F فضاء جزئي مكمل في E وان $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ أساس F ، لقد اثبت بيساجا في [2] إن هـناك متسلسلة غير تناقصية $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ من الأعداد الصحيحة الموجبة تحقق $\lim_n k_n=\infty$ ،بحيث إن $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ يتكافأ تشاكليا مع $(e_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ وعليه فقد خمن بيساجا في [2] أن المتسلسلة $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ يمكن أن تختار بحيث إن $k_n \neq k_m$ لكل $n \neq m$

ملاحظـة: . بالـنظر إلـى نظـرية كنتور برنستن [8] فانه يمكننا القول إن ما يحقق مخمنة بيساجا، يحقق خاصية التكافؤ التشاكلي (QEP) .

بالـنظر إلـى الفضاءات التي تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي (QEP) فإننا نرى إن الكثير من فضـاءات كوثا النووية تحقق ذلك ،على سبيل المثال فان كل الفضاءات المنتظمة تحقق ذلك [3]، ولكـن فـيما يـتعلق بمخمنة بيساجا فان الأمر يختلف إذ إن ما أمكن إثباته إن ما يحقق مخمنة بيسـاجا هـي مجموعة خاصة من الفضاءات النووية وتحت شروط خاصة ، و من الأمثلة على ذلـك فضـاء متسلسـلات القوي [8,9] ، فضاء دراجلف [1,5] ، الفضاء النووي المحقق لخاصـية الانـتظام وخاصـية d_1 معا [6] ، الفضاء المستقر و المنتظم [3] ، الفضاء غير المسـتقر [16,13] ، حاصـل جمـع لفضاءين نوويين تحت شرط خاص [15,14] و بعض الحالات الخاصة الأخرى.

حقائق مهمة لإتمام هذا البحث

بـالدمج مابين ما برهنه كنداكوف [6] و ما برهنه بيساجا [2]، انظر جاسر صرصور[11] يمكننا اختـيار سلسلتين من المقاييس $\left(\|\ \|_p \right)_{p=1}^{\infty}, \left(|\ |_r \right)_{r=1}^{\infty}$ المتصلة وتحقق الفرضية المساعدة التالية:

فرضـية مساعدة 1. نفرض إن E فضاء رياضي نووي و أساسه $(e_n)_{n=1}^{\infty}$، كذلك نفرض ان F فضـاء مكمـل فـي E و أساسـه $(f_n)_{n=1}^{\infty}$، إذن لكل عدد صحيح موجب m يمكن إيجاد سلسـلتين مـن المقايـيس المتصلة $(| \ |_r)_{r=1}^{\infty}, (\| \ \|_p)_{p=1}^{\infty}$ المعرفة على F,E على الترتيب و المعرفـتان للتوبولوجـيا المعرف عليهما، كذلك يمكن إيجاد اقتران مسقطي متصل $Q:E \to F$ وسلسة غير تناقصية من الأعداد الطبيعية

(k_n) علي أن تكون $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$ وبحيث إن:

1- $|Qe|_r \le (2^m)^{-r} \; \|QE\|_{r+1} \le (2^m)^{-2(r+1)} \; |e|_{r+2}$ لكـل $r \in N$ و لكل $e \in E$

2- $\left(\dfrac{\|f_n\|_r}{\|f_n\|_s}\right) = \left(\dfrac{|e_{k_n}|_r}{|e_{k_n}|_s}\right)$ لكل $r,s,n \in N$

ملاحظة:

1-من (1) يستنتج أن $(e_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع $(f_n)_{n=1}^{\infty}$

2- إذا كانـت E فضـاء منـتظم فانه يمكننا إيجاد سلسلة من المقاييس التي تحقق الفرضية المساعدة وكذلك أن تكون المتسلسلة $\left(\dfrac{|e_n|_r}{|e_n|_{r+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ تناقصية لكل r عدد طبيعي.

إذا كانت $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ، $(e_n)_{n=1}^{\infty}$، $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ أساسات الفضاء النووي E بحيث $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع كل من $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ و$(y_n)_{n=1}^{\infty}$، فان $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشـاكلي مع $(y_n)_{n=1}^{\infty}$، كذلك يمكننا إيجاد نظام من المقاييس $(| \ |_r)_1^{\infty}$ المعرفة للتوبولوجيا المعرف على E بحيث يحقق هذا النظام الشرط التالي $|x_n|_r = |e_n|_r$ لكل عدد طبيعي r,n

فرضـية مسـاعدة 2 . نفرض إن E فضاء رياضي نووي منتظم و أساسه $(e_n)_{n=1}^{\infty}$، كذلك نفرض أن F فضاء مكمل في E و أساسه $(f_n)_{n=1}^{\infty}$،إذا وجد متسلسلة جزئية $(i_n)_{n=1}^{\infty}$بحيث ان $(f_{n+m})_{n=1}^{\infty}$ تحقـق خاصية التكافؤ التشاكلي مع $(e_{i_n})_{n=1}^{\infty}$، فان $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع **متسلسلة جزئية من** $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

البرهان . انظر الفرضية المساعدة (3) في [13]

نظـرية 1. نفرض أن F فضاء رياضي جزئي مكمل في فضاء كوثا النووي المنتظم E وان $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ أسـاس للفضـاء F ، وأن $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ أسـاس للفضاء E . إذا كان F فضاءاً غير مستقر فانه يوجد متسلسلة جزئية $(e_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ من $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ بحيث إن $(e_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

البرهان. انظر نظرية (1) في [13] .

النتائج الرئيسية

نظـرية 2. نفرض أن F فضاء رياضي مستقر و أساسه $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ و أنه فضاء جزئي مكمل في الفضاء المنتظم E وان $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ أساس للفضاء E، إذن يوجد متسلسلة جزئية $(e_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ من $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $(e_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

الـبرهان. بمـا إن F فضاء جزئي مكمل في E فانه يوجد فضاء جزئي مكمل أخر وليكن W بحيـث إن $W\oplus F=E$. ولكن F فضاء مستقر وهذا يعني أن $F\oplus F\cong F$ وعليه فإن $E\cong F\oplus F\oplus W=F\oplus E$. وبمـا إن $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ أسـاس للفضـاء E ، $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ أساس للفضـاء F وبفرض إن$y_{2n}=e_n$ و إن $f_n=y_{2n-1}$ فإن $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ تصبح أساس الفضاء $E\oplus F$، وحيـث إن $E\oplus F\cong E$ فانـه يمكننا اعتبار ان $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ أساس للفضاء E وذلك تحت تأثير المشـاكلة التقابلـية. ولكـن E فضـاء منـتظم، إذن يحقق خاصية التكافؤ التاشكلي ، لهذا فان $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ تحقـق خاصية التكافؤ التاشكلي مع $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ولكن $(y_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ متسلسلة جزئية مـن $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ وتحقـق خاصـية التكافؤ التاشكلي مع $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ وذلك من تعريفها ، إذن يوجد متسلسلة جزئية $(e_{m_n})_{n=1}^{\infty}$ من $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التاشكلي مع $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

نظـرية 3. نفـرض أن E فضـاء نـووي منتظم و أساسه $(e_n)_{n=1}^{\infty}$،وكذلك لا يوجد متسلسلة جزئية $(e_{m_n})_{n=1}^{\infty}$ من $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ بحيث $\overline{span\,(e_{m_n})_{n=1}^{\infty}}\oplus\overline{span\,(e_{m_n})_{n=1}^{\infty}}$ لايتشاكل تقابليا مع فضاء جزئي مكمل في E . فإن E تحقق مخمنة بيساجا.

الـبرهان: نفـرض أن F فضـاء جزئي مكمل في E و أن $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ أساس للفضاء F .من الفرضـية المسـاعدة [1] يوجد سلسلة $(k_n)_{n=1}^{\infty}$غير تناقصية من الأعداد الطبيعية مع احتمال الـتكرار بحيث أن $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ يحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع $(e_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ ، وبما أن $(k_n)_{n=1}^{\infty}$

تحتمل التكرار، إذن هناك متسلسلة $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ تصاعدية تحقق e_{p_m} = e_n لكل n بحيث $p_m \leq n$ <p_{m+1} نفـرض انـه يوجـد $(p_{m_n})_{n=1}^{\infty}$ متسلسـلة جزئـية مـن $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ بحيـث إن $p_{m_{n+1}} - p_{m_n} \geq 2$ ، إذن يمكـن إيجاد متسلسلتين جزئيتين $(f_{2_n})_{n=1}^{\infty}, (f_{1_n})_{n=1}^{\infty}$ من $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ بحيـث ان $(f_{1_n})_{n=1}^{\infty}$ تحقـق خاصية التكافؤ التشاكلي مع $(e_{p_{m_n}})_{n=1}^{\infty}$ ، وكذلك $(f_{2_n})_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصـية الـتكافؤ التشاكلي مع $(e_{p_{m_n}})_{n=1}^{\infty}$ ، إذن $(f_{1_n})_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع $(f_{2_n})_{n=1}^{\infty}$. إفـــــــــــرض أن $\overline{span}\,(e_{p_{m_n}})_{n=1}^{\infty} = D$ ، اذن $\overline{span}(f_{1_n})_{n=1}^{\infty} \oplus \overline{span}(f_{2_n})_{n=1}^{\infty} \cong D \oplus D$. لكـن $A_2 \oplus A_1$ فضاء جزئي مكمل في F وعليه فإن $D \oplus D$ تتشاكل تقابليا مع فضاء جزئي مكمل في E وهذا يخالف فرضية عدم وجود مـثل ذلـك لهذا فان فرضية وجود $(p_{m_n})_{n=1}^{\infty}$ غير ممكنة، إذن يمكن ان نجد r بحيث أن لكل r <s,m و s≠m فإن $e_{k_s} \neq e_{k_m}$، وهذا يعني ان $(f_{n+r})_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع متسلسـلة جزئـية $(e_{m_n})_{n=1}^{\infty}$ ، حيـث أن $(e_{m_n} = e_{k_{n+r}}, \forall\, n \in N)$. بالرجوع الى فرضية مسـاعدة.2 ، فـان $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع متسلسلة جزئية من $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ،لهذا فإن E تحقق مخمنة بيساجا.

افـتراض. نفرض أن E هو فضاء كوثا النووي المنتظم وأن $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ أساس له، كما نفرض أن F_i هـو فضـاء رياضي غير مستقر وأن $(f_{i,n})$ أساس للفضاء F_i ، وأن $(f_{1,k_n})_{n=1}^{\infty}$ لا يحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع $(f_{2,m_n})_{n=1}^{\infty}$ لكل سلسلة جزئية $(f_{1,k_n})_{n=1}^{\infty}$ من $(f_{1,n})_{n=1}^{\infty}$ ، و $(f_{2,m_n})_{n=1}^{\infty}$ سلسلة جزئية من $(f_{2,n})_{n=1}^{\infty}$. فإذا كان F = $F_2 \oplus F_1$ هو فضاء جزئ مكمل في E فإن

$(f_n)_{n=1}^{\infty} = (f_{2,n})_{n=1}^{\infty} \cup (f_{1,n})_{n=1}^{\infty}$ تحقـق خاصية التكافؤ التشاكلي مع متسلسلة جزئية $(e_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ من $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

الـبرهان. بمـا أن F_i فضاء جزئي مكمل في F و أن F فضاء جزئي مكمل في E فإن F_i هو فضـاء جزئي مكمل في E، وبما أن F_i هو فضاء رياضي غير مستقر إذن هناك متسلسلة جزئية $(e_{i_n})_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع $(f_{i,n})_{n=1}^{\infty}$. وحيث إن $(f_{1,k_n})_{n=1}^{\infty}$ لا يحقق خاصية

الـتكافؤ التشـاكلي مع $\left(f_{2,m_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ لكل متسلسلة جزئية $\left(f_{1,k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ من $\left(f_{1,n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ، و لكل $\left(f_{2,m_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ متسلسلة جزئية من $\left(f_{2,n}\right)_{n=1}^{\infty}$ اذن لا يوجد متسلسلة جزئية من $\left(e_{1_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع متسلسلة جزئية من $\left(e_{2_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ، لهذا يمكننا اعتبار ان $\left(e_{2_n}\right)_{n=1}^{\infty}\cap\left(e_{1_n}\right)_{n=1}^{\infty}=\varnothing$. نفـرض أن $\left(e_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}=\left(e_{1_n}\right)_{n=1}^{\infty}\cup\left(e_{2_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ، إذن $\left(e_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ هـي متسلسلة جزئـية من $\left(e_n\right)_{n=1}^{\infty}$ وحيث إن $\left(e_{i_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع $\left(f_{i,n}\right)_{n=1}^{\infty}$. إذن $\left(f_{1,n}\right)_{n=1}^{\infty}\cup\left(f_{2,n}\right)_{n=1}^{\infty}=\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع متسلسلة جزئية $\left(e_{k_n}\right)$

نتـيجة:- نفرض أن E فضاء كوثا النووي وأن $\left(e_n\right)_{n=1}^{\infty}$أساس للفضاء E، كما نفرض أن F فضـاء جزئـي مكمـل فـي E و أن $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ أسـاس للفضـاء F بحيـث ان لكل متسلسلة جزئـية $\left(f_{m_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ فان $\overline{span\left(f_{m_n}\right)_{n=1}^{\infty}}\oplus\overline{span\left(f_{m_n}\right)_{n=1}^{\infty}}$ لا تحقق المشاكلة التقابلية مع أي فضـاء جزئـي مكمـل في E. اذن $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي مع متسلسلة جزئية $\left(e_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ من $\left(e_n\right)_{n=1}^{\infty}$

نظـرية 4 : نفرض أن E هو فضاء كوثا النووي المتظم وأساسه $\left(e_n\right)_{n=1}^{\infty}$، نفرض أن F_1 هو فضـاء نـووي مسـتقر وأساسـه $\left(f_{1n}\right)_{n=1}^{\infty}$، وأن F_2 فضـاء نـووي غـير مستقر وأساسه $\left(f_{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$.إذا كان

$F=F_1\oplus F_2$ هو فضاءاً رياضياً جزئياً مكملاً في E، فإنه يوجد متسلسله جزئية $\left(e_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ من $\left(e_n\right)_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $\left(f_{1n}\right)_{n=1}^{\infty}\cup\left(f_{2n}\right)_{n=1}^{\infty}=\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي "QEP" مع $\left(e_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

البرهان: بما أن F_1 فضاء رياضي جزئي مكمل من F، وكذلك F فضاء جزئي مكمل في E، فإن F_1 فضـاء جزئي مكمل في E، وبما أن F_1 هو فضاء مستقر إذاً $F_1\cong F_1\oplus F_1$ وعليه فإن $E\oplus F_1\cong E$.

نفـرض أن $e_n=y_{2n}$ وأن $y_{2n-1}=f_{1n}$ لكل $n\in N$. إذن $\left(y_n\right)_{n=1}^{\infty}$ أساس للفضاء $E\oplus F_1$، وبما أن $E\cong F_1\oplus E$ فإنـه يمكنـنا اعتبار $\left(y_n\right)_{n=1}^{\infty}$. أساس للفضاء E، ولكن E فضاء منتظم، إذن يحقـق خاصـية الـتكافؤ التشاكلي، إذن $\left(y_n\right)_{n=1}^{\infty}$تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي "QE" مع

$\left(e_n\right)_{n=1}^{\infty}$، وبما أن F2 هو فضاء جزئي مكمل في E، وحيث أن F2 فضاء رياضي غير مستقر فأنه يوجد متسلسلة جزئية $\left(e_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ من $\left(e_n\right)_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $\left(f_{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشـاكلي "QEP" مع $\left(e_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$. ولكن $\left(e_n\right)_{n=1}^{\infty}$ هي $\left(y_{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ إذن يوجد متسلسلة جزئية $\left(y_{t_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ من $\left(y_{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ وبناء عليه إذا فرضنا أن

$\left(y_{r_n}\right)_{n=1}^{\infty}=\left(y_{t_n}\right)_{n=1}^{\infty}\cup\left(y_{2n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ فإن $\left(y_{r_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي " QE " مـع $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}=\left(f_{2,n}\right)_{n=1}^{\infty}\cup\left(f_{1,n}\right)_{n=1}^{\infty}$، وحيـث إن $\left(y_n\right)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي "EQ" مع $\left(e_n\right)_{n=1}^{\infty}$ فإنه يوجد هناك متسلسلة جزئية $\left(e_{m_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ من $\left(e_n\right)_{n=1}^{\infty}$ بحيث $\left(e_{m_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ تحقق خاصية التكافؤ التشاكلي" QE " مع $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$.

ولا يفوتـنا فـي الختام أن نسجل شكرنا وتقديرنا للأستاذ إسماعيل محي الدين فايز الأسطل لمساهمته القيمة في التدقيق اللغوي لهذا البحث.

References

1. H. Ahonen. On nuclear spaces defined by Dragliev functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.AI Math. Dissertiones 38 (1981), 1-57.
2. C.Bessaga, some remarks on Dragilev’s theorem, studia math.31 (1968) , 307 – 318.
3. L. Crone and W.B. Robinson, Every nuclear Frechet space with a regular basis has the quasi-equivalence property, ibid.53 (1975) 203-207.
4. E. Dubinsky, the structure of Nuclear Frechet spaces, Lecture Notes in math. 720, springer. Berlin 1979.
5. V.P.Konda kov. On a certain generalization of power series spaces in current problems in mathematicala nalysis, Rostov stale univ 1978, 92, 99 (in Russian).
6. V.P.Konda kov, unconditional bases in certain Kothe spaces, sibirst. Math. 25 (3) (1984) , 109-119 (in Russian).
7. G.kothe , Topologische lineave Roume I, springer, Berlin 1960.
8. B.s. mityagin, Apprbximative dimension and bases in nuclear spaces, uspethi mat. Nauk 16 (4) (1961), 73 – 132 (in Russian).
9. B.s. mityagin, Equivalence of bases in Hilbertscaler, studia math. 37 (1971). 111-137 (in Russan).
10. A. Pietsch, Nuclear Locally conver spaces, springer, Berlin 1972.

11. J.sarsour. Bessaga’s Conjecture and Quasi- equivalence property in unstable Kothe spaces, ph.D. Thesis, METU Ankara 1991.
12. J.sarsour. Bessaga’s Asufficient condition for the Bessaga's conjecture islamic university Journal Vol.2, no1,(1994) 43 – 56.
13. J.sarsour , Z.Nurla, Bessagas conjecture in unstable kothe spaces and products, studia math 104 (1993) 221-228.
14. J. Sarsour, complemented subspace of $K\left(a_n^r\right) \oplus K\left(a_n^r\right)$. islamic university Journal Vol.5, no2 june,(1997) 63-74
15. J. Sarsour. Bessaga’s conjecture in Finite direct sum of d_1 Unstable Kothe spaces, . islamic university Journal Vol.11 no.2 p31-p44,2003
16. T.Terzioglu. unstable kothe spaces and the functor Ext, Doġa Tr. J. Math. 10 (1986), 227-231 (special issue).